Om du väljer Uppgift 1 kommer du bli bedömd enligt följande mall:

E: *Du förväntas svara på uppgifter 1-4 utifrån ett konkret exempel på en andragradsfunktion. D.v.s. svara på frågorna där du har valt värden på a, b och c innan du börjar. Den enda regeln är att $a \neq 1$ samt att ingen av koefficienterna får vara lika med noll.*

C: *Du förväntas svara på uppgifter 1-4 utifrån det allmänna fallet av en andragradsfunktion, d.v.s. där du behåller koefficienterna a, b och c som okända storheter.*

A: *Du förväntas uppfylla kraven på C-nivå samt även svara på fråga 5.*

<u>UPPGIFT 1</u>

Antag att $y = ax^2 + bx + c$, där $a, b, c \in \mathbb{R}$ och $x \in D$ för någon definitionsmängd D, som i sin tur gör att $y \in V$ för motsvarande värdemängd V.

1. Bestäm mängderna D och V så att funktionen $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ blir inverterbar. Motivera dina svar i termer av injektiva funktioner.
   OBS! Ett fullständigt svar innehåller två separata fall.

2. Bestäm allmänna formler för den inversa funktionen $y = f^{-1}(x)$ i de två olika fallen.

3. Demonstrera dina svar i föregående frågor genom att välja specifika värden på a, b och c och rita ut graferna till både $y = f^{-1}(x)$ och $y = f(x)$. Observera att graferna måste respektera de definitions- och värdemängder som motsvarar din funktion.

4. Geometriskt kan en invers ses som en linjär avbildning. Bestäm den matris S som ansvarar för denna avbildning. Bestäm också matrisen S^{-1} och diskutera vad denna har för verkan i detta sammanhang. Om vekorn $\vec{u}(x) = (x, f(x))$, utvärdera $S\,\vec{u}(x)$ och tolka svaret i termer av inversen $f^{-1}(x)$.

5. Låt $P_1 = \big(x, f(x)\big)$ och $P_2 = \big(x, f^{-1}(x)\big)$.
   Beskriv hur vinkeln α mellan $\overrightarrow{OP_1}$ och $\overrightarrow{OP_2}$ beror på $x, f(x)$ samt $f^{-1}(x)$. Beskriv villkoren på dessa storheter i intressanta specialfall, samt ge allmänna samband för övriga vinklar. Motivera med exempel, bilder och grafer.

Om du väljer Uppgift 2 kommer du bli bedömd enligt följande mall:

E: *Du förväntas svara på uppgifter 1-3.*

C: *Du förväntas svara på uppgifter 1 och 4, 5 (men inte frågor 2 och 3).*

A: *Du förväntas uppfylla kraven på C-nivå samt även svara på fråga 6 och 7.*

<u>**UPPGIFT 2**</u>

Studera faktabladet om Koch snöflingor (snowflakes) samt svara på följande frågor. Benämn de fyra etapperna (”Stage”) med bokstaven n så att $n = 0$ för kvadraten, $n = 1$ för etapp 1 (alltså ”Stage 1”), $n = 2$ (andra delningen, ”Stage 2”), o.s.v.

1. För de fyra fallen som faktabladet visar, gör en tabell där du beräknar (a) $R_n =$ antal sidlängder, (b) $P_n =$ total omkrets och (c) $A_n =$ total area för de ingående figurerna (där alltså $n = 0,1,2,3$). Gör sedan en annan tabell med *skillnaderna mellan två etapper*, d.v.s. med (a) $R_1 - R_0$, $R_2 - R_1$ och $R_3 - R_2$ och liknande för (b) och (c).

2. Rita ut grafer med n på den horisontella axeln samt R_n, P_n och A_n på den vertikala axeln (tre olika grafer). Kommentera utifrån graferna hur dessa storheter beror av n, använd nyckelord som: *växande/avtagande, växande skillnad/avtagande skillnad* etc.

3. Rita en trovärdig bild av <u>*en del av*</u> etapp 4 figuren, och förklara utifrån bilden hur mycket area samt omkrets har adderats till etapp 3 figuren. Beräkna så R_4, P_4 och A_4. Vad tror du händer allmänt då n växer?
Ledning: För till exempel area har vi att $A_4 = A_3 +$ (skillnad som lagts till). Vad händer med den totala arean i etapp 5, 6, 7 o.s.v., alltså då n blir större och större?

4. Formulera ett samband som beräknar dessa tre storheter som funktion av n <u>samt</u> som funktion av föregående värde. Dela upp denna fråga i (a), (b) och (c) enligt mönstret i fråga 1. *Till exempel: Beräkna antal sidlängder $R_n(n)$ (= funktion av n)* <u>*samt*</u> *$R_n(R_{n-1})$ (= funktion av föregående etapps antal sidlängder R_{n-1}).*

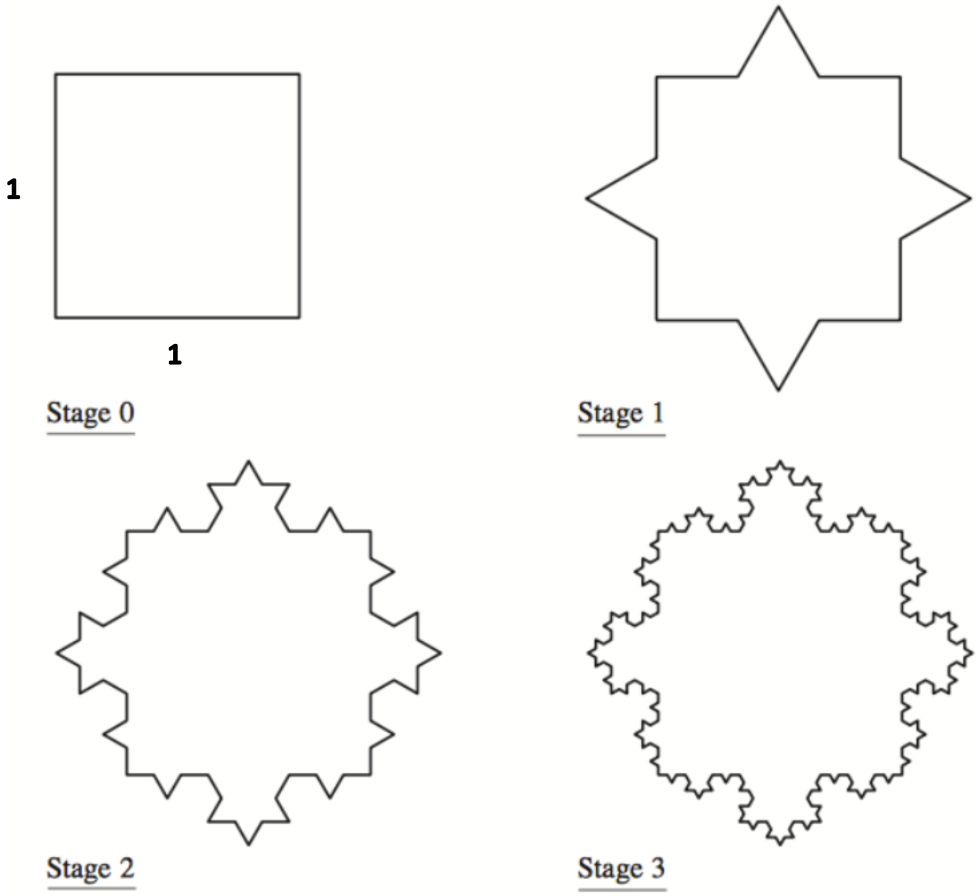
5. Beräkna R_{20}, P_{20} och A_{20}.

6. Kommentera svaren i fråga 4 i *termer av geometriska och aritmetiska serier*, i fallet ”som funktion av n”. Ange differensen (aritmetisk) samt kvoten (geometrisk) i dessa serier. Beräkna gränsvärdena som erhålls då man låter $n \to \infty$ för de tre storheterna och jämför dina resultat med allmänna resultat om gränsvärden för dessa serier.

7. Studera fenomenet ”Coastline paradox” samt ”Fractal dimension” på internet och sätt så denna uppgift i ett omvärldsligt sammanhang. Ge minst ett konkret exempel.

Faktablad till Uppgift 2

Koch Snowflakes



Description
In 1904, Helge von Koch identified a fractal that appeared to model the snowflake. The fractal is built by starting with a square and removing the inner third of each side, building an equilateral triangle at the location where the side was removed, and then repeating the process indefinitely. The process is illustrated above, with the original square to the left and the resulting figures after one, two and three iterations.